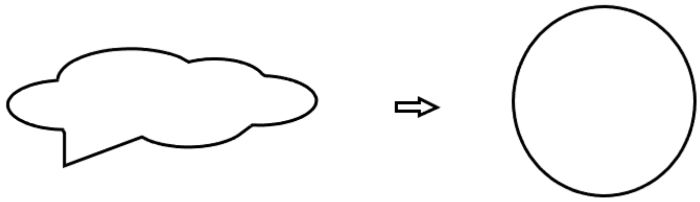
SOLUCIÓN

Antes de hacer, trata de entender.

Primero hazte preguntas para ver si has entendido el problema.

¿Influye la forma de la pista circular en la solución del problema?

Notar que la forma de la pista circular es independiente de la solución del problema porque no pregunta dónde ni cuándo se cruzan, sino sólo las veces que se cruzan. Así pues, se puede utilizar una pista circular con la forma más sencilla posible: una circunferencia.



¿Influye la velocidad a la que corren (siempre y cuando Andrea dé 12 vueltas en dos horas y Omar 8 vueltas en dos horas)?

Como no pregunta dónde ni cuándo se cruzan, la solución es independiente si van cambiando de velocidad (siempre y cuando Andrea dé 12 vueltas en dos horas y Omar dé 8 vueltas en dos horas). En consecuencia, podemos asumir que se desplazan a velocidad constante (en módulo). Así, si consideramos una hora en lugar de dos, Andrea daría 6 vueltas y Omar 4 y se encontrarían en el punto inicial, porque ambos darán vueltas completas en ese tiempo. Más aún, en media hora, darían respectivamente 3 y 2 vueltas, encontrándose también en el punto inicial:

	Andrea	Omar
Sentido	horario	antihorario
Vueltas totales	12	8
Tiempo (horas)	2	2

→

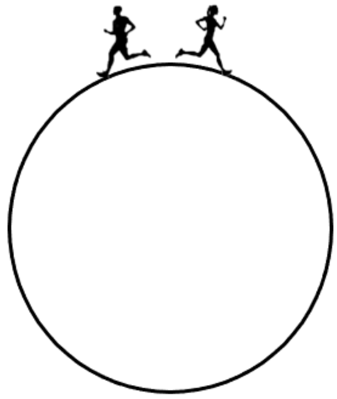
Andrea	Omar
horario	antihorario
6	4
1	1

→

Andrea	Omar
horario	antihorario
3	2
1/2	1/2

El problema inicial se ha reducido al siguiente problema más sencillo:

	Andrea	Omar
Sentido	horario	antihorario
Vueltas totales	*3*	*2*
Tiempo (horas)	*1/2*	*1/2*
Velocidad (módulo)	*Constante*	*Constante*



¿Cuántas veces se cruzan en media hora?

Nota que la solución final será el resultado del problema simplificado multiplicado por 4 porque 2 horas son 4 medias horas.

Podemos utilizar varias estrategias para resolver el problema simplificado. Hemos incluido tres estrategias, pero, ¡seguro que vosotros encontráis alguna más

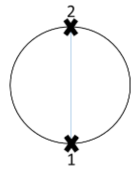
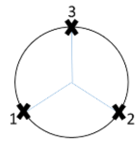
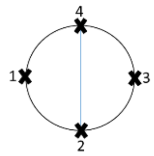
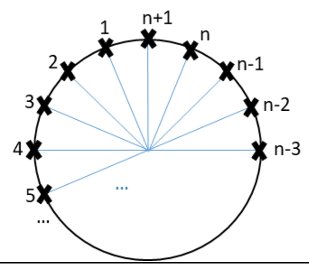
Estrategia 1: Experimentar y buscar regularidades, pautas.

Supongamos que Omar está parado y variamos la cantidad de vueltas que Andrea realiza en el mismo tiempo.

Vueltas de Andrea (horario)	Vueltas de Omar (antihorario)	Veces que se cruzan
1	0	1
2	0	2
n	0	n

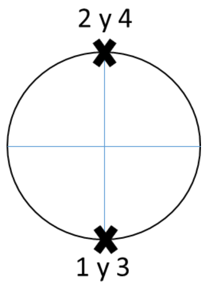
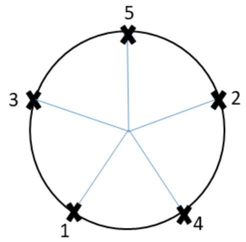
Observamos que el número de cruces es igual al número de vueltas de Andrea.

Supongamos ahora que Omar hace sólo una vuelta y variamos la cantidad de vueltas que Andrea realiza en el mismo tiempo.

Vueltas de Andrea (horario)	Vuelta de Omar (antihorario)	Veces que se cruzan	Observaciones	Diagrama donde se cruzan. (El 1 indica la primera vez que se cruzan, el 2 la segunda, etc.)
1	1	1 + 1	Se divide el circuito en 2 partes iguales y se cruzan a la mitad y al final.	
2	1	2 + 1	Se divide el circuito en 3 partes iguales y se cruzan cada vez que Andrea avanza 2 partes y Omar avanza 1 parte (en el mismo tiempo).	
3	1	3 + 1	Se divide el circuito en 4 partes iguales y se cruzan cada vez que Andrea avanza 3 partes y Omar avanza 1 parte (en el mismo tiempo).	
n	1	n + 1	Se divide el circuito en n+1 partes iguales y se cruzan cada vez que Andrea avanza n partes y Omar avanza 1 parte (en el mismo tiempo).	

Observamos que el número de cruces es igual a la suma de las vueltas de cada uno.

Supongamos ahora que Omar hace dos vueltas y variamos la cantidad de vueltas que Andrea realiza en el mismo tiempo:

Vueltas de Andrea (horario)	Vuelta de Omar (antihorario)	Veces que se cruzan	Observaciones	Diagrama donde se cruzan. (El 1 indica la primera vez que se cruzan, el 2 la segunda, etc.)
2	2	2 + 2	Se divide el circuito en 4 partes iguales y se cruzan a la mitad y en el comienzo.	
3	2	3 + 2	Se divide el circuito en 5 partes iguales y se cruzan cada vez que Andrea avanza 3 partes y Omar avanza 2 partes (en el mismo tiempo)	

Observamos que el número de cruces es también igual a la suma de las vueltas de ambos. ¡Ya tenemos la solución! Si en media hora Andrea da 3 vueltas y Omar 2, se cruzan 5 veces en media hora. En dos horas se cruzan pues 5 x 4 = 20 veces.

Así pues, la cantidad de veces que se cruzan es la suma de las vueltas de cada uno: 12 + 8 veces.

Estrategia 2: Colocarnos en el lugar más adecuado.

Si hemos sido más observadores en la estrategia 1, podríamos haber llegado a esta conclusión a partir de la primera tabla:

Vueltas de Andrea (horario)	Vueltas de Omar (antihorario)	Veces que se cruzan
1	0	1
2	0	2
n	0	n

En lugar de fijar nuestro sistema de referencia en el punto de partida del circuito (en este sistema de referencia se mueven los dos corredores) lo fijamos en uno de los corredores. Esto es equivalente a que uno está quieto y el otro se mueve. Por ejemplo, fijemos nuestro sistema de referencia en Andrea. Si Omar estuviera quieto, nos lo cruzaríamos 3 veces (visto desde Andrea). Pero como Omar no está quieto, sino que da 2 vueltas, se suman esas ocho vueltas para obtener los cruces totales: 3+2 = 5.

5 x 4 = 20 cruces.

Podemos utilizar el mismo argumento para las dos horas: 12 + 8 = 20.

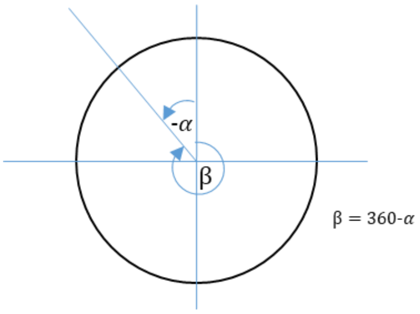
Estrategia 3: Cinemática circular (esta estrategia no está al alcance de todos…)

Se puede usar la velocidad angular (grados por minuto) para saber cada cuánto tiempo se cruzan, ya que la velocidad (módulo) es constante, el tiempo de cruce también lo es.

Consideremos positivo el sentido de Andrea. Como Andrea corre 3 vueltas (3·360º) cada 30 minutos y Omar (−2·360º) cada 30 minutos:

$$w_A = \frac{3 \cdot 360^0}{30} = \frac{36^0}{min}$$

$$w_O = \frac{2 \cdot 360^0}{30} = -\frac{24^0}{min}$$



La condición de cruce en el tiempo t es:

360−(24·t) = 36·t → 360 = 60·t → t = 6 minutos.

Si se cruzan cada 6 minutos, en 30 min se han cruzado 30/6 = 5 veces.

5 x 4 = 20 cruces.

Podemos calcularlo directamente para las dos horas: 120/6= 20.

Nota 1: Las tres estrategias se pueden usar directamente, sin necesidad de simplificar el problema.

Nota 2: Si alguien considera que cuando se juntan tras las dos horas no es un cruce, se restaría uno al resultado obtenido y se habrían cruzado 19 veces. Cuestión de convenio.